Guilherme de Almeida
g.almeida50(a)gmail.com

Neste artigo propomo-nos, mostrar como se pode determinar analiticamente o tamanho da imagem de um dado objecto, no plano focal de um telescópio, em função da distância focal efectiva do instrumento utilizado. Este assunto interessa tanto para a astrofotografia analógica como para a sua congénere digital, revelando-se, por isso, de interesse para muitos utilizadores de telescópios que pretendam registar imagens de objectos extensos, prevendo que fracção do tamanho do *chip* do CCD essa imagem ocupará. E também permite calcular o tamanho com que a imagem aparecerá no plano do diafragma de campo de uma ocular. Como vamos ver, o cálculo dessas dimensões é mais fácil do que parece.

Considerações iniciais

Comecemos por observar a figura 1, supondo um objecto AB, situado à esquerda da figura e infinitamente afastado. A partir daí, a figura mostra um esquema representativo da formação da imagem desse objecto AB, por meio da objectiva (simplificada) de um telescópio refractor. Desse objecto AB, o telescópio produzirá a imagem conjugada, A'B', situada no seu plano focal-imagem. Os pontos A e B poderão ser duas estrelas, ou dois pontos diametralmente opostos do limbo de um planeta, do limbo lunar, etc. Supõem-se estes pontos definidores das extremidades do objecto a que nos referiremos ao longo deste artigo.

Apesar do esquema da Fig.1 se referir a um telescópio refractor, por comodidade de representação, o exemplo e o raciocínio são extensivos, com todo o rigor, a qualquer tipo de telescópio. Considera-se que *f* representa a distância focal *efectiva* do telescópio, nativa ou amplificada por meio de lente de Barlow ou qualquer outra forma de modificação da distância focal, abrangendo ainda a sua diminuição por meio de redutores de distância focal. O objecto AB subtende o tamanho aparente definido pelo ângulo θ, PPI é o plano principal-imagem da objectiva (marcado a tracejado) e O indica o centro óptico desta. O plano focal, representado a traço-ponto, contém a imagem A'B', conjugada do objecto AB.
Consideraram-se os raios luminosos 1 e 2 originados no ponto A, sendo os raios 3 e 4 originados em B. Para maior clareza os raios 2 e 3 foram representados a preto e os outros a cinzento. Da figura conclui-se facilmente que

$$\tan\theta = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A'B'}{f} \quad \text{ou seja, } A'B' = f\tan\theta. \qquad \text{(Equação 1)}$$

Note-se que A e B podem ser dois pontos diametralmente opostos do disco de um planeta, ou de uma cratera lunar; podem ainda ser duas estrelas angularmente próximas entre si.

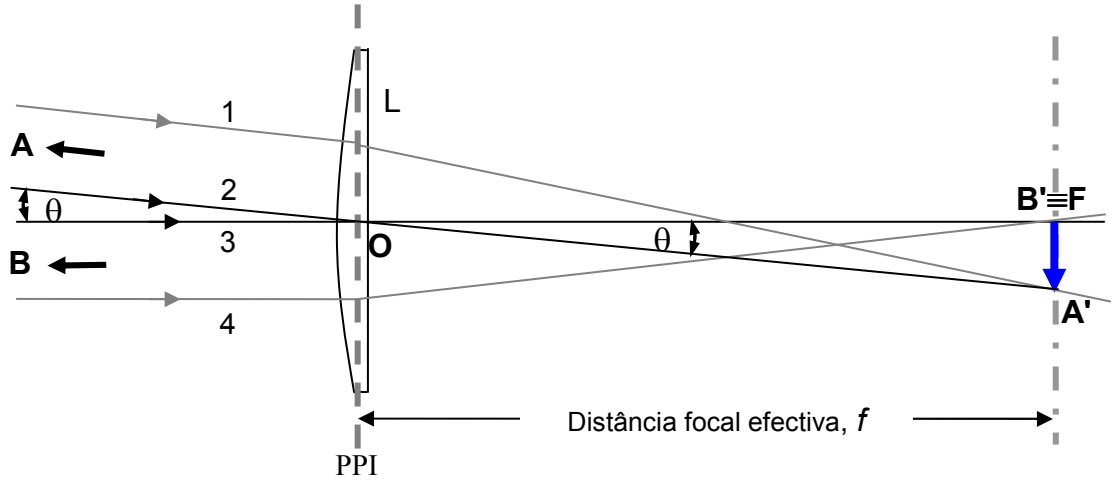

Fig 1. Representação esquemática da formação da imagem de um objecto AB, no plano focal de um telescópio, produzindo-se no plano focal deste a imagem conjugada, A'B'. O tamanho aparente do objecto AB é dado pelo ângulo θ. O mesmo ângulo θ marca também o ângulo subtendido pelo segmento A'B' em relação ao ponto O.

Por se tratar sempre de pequenos ângulos, no caso dos telescópios, poderemos escrever com excelente aproximação tan $\theta \approx \theta$, com θ expresso em radianos **(**v. **nota 1)**. Devido a esta propriedade, poderemos escrever a equação 1 como $A'B' = f\,\theta$, com θ expresso em radianos. O símbolo do radiano é "rad", sendo 1 rad=180º/π=57,295779...º ≈ 57,296º (v. **nota 2**).

Para utilizar θ directamente em graus, e designando o comprimento do segmento *A'B'* por *d*, será então

$$d = \frac{f\,\theta}{57{,}296} \qquad \text{(Equação 2)}$$

Apresentadas as necessárias justificações, passemos a analisar diversos exemplos concretos, onde todas as conversões aparecem já feitas, de acordo com o anteriormente referido. Em todas as aplicações da equação anterior, *f* e *d* têm de estar expressas nas mesmas unidades (usualmente em milímetros).

Aplicações e exemplos concretos

1. Considere-se um objecto de tamanho aparente θ_1, **em graus** (º), no caso de se utilizar um telescópio de distância focal nativa *f* (em milímetros). A imagem A'B', com o tamanho linear *d* dado (em milímetros) por

$$d_1 = \frac{f\,\theta_1}{57{,}296}$$, vai formar-se no plano focal.

<u>Exemplo 1</u>: um objecto de 1º com uma objectiva de *f*=900 mm irá aparecer no plano focal com a dimensão linear d_1, dada por

$$d_1 = \frac{900 \times 1}{57{,}296} = =15{,}71 \text{ mm.}$$

(**1**) Para se ter uma ideia desta excelente aproximação, repare-se que para um ângulo de 2º, a aproximação tan $\theta = \theta$, com θ expresso em radianos comporta um erro relativo de apenas 0,0406 % e para 0,5º tal erro seria de 0,00254 %.

(**2**) A título de exemplo, um ângulo de θ=0,01 rad corresponderá a 0,01×57,296º=0,5796º. Ou, no raciocínio inverso, um ângulo de 0,2º corresponderá a 0,2/57,296 rad= 0,00349 rad.

Para pequenos ângulos, como é o caso das imagens no plano focal dos telescópios, verifica-se que os segmentos medidos no plano focal são praticamente coincidentes com arcos de circunferência de raio igual à distância focal, o que legitima a nota de rodapé da página anterior. Por outras palavras (Fig 1), o segmento de recta A'B' não difere significativamente do arco de circunferência de centro em O e passando por A' e por B'. É pois legítimo assumir que, para uma dada distância focal, o tamanho da imagem no plano focal é directamente proporcional à sua dimensão aparente. Assim sendo, no mesmo caso, um objecto com 0,1º apareceria com 1/10 do tamanho, ou seja, com 1,571 mm.

2. Um objecto com o tamanho aparente θ_2, **em minutos de arco** ('), vai aparecer, no plano focal de um telescópio de distância focal *f* (em milímetros,) com o tamanho linear dado por

$$d_2 = \frac{f\,\theta_2}{57{,}296 \times 60} \quad \text{(Equação 3)}$$

Exemplo 2: com *f*=1000 mm, um objecto com θ_2=12' vai aparecer no plano focal com

$d_2 = \frac{1000 \times 12}{3437{,}8}$=3,39 mm. O factor 3437,8 converte radianos para minutos de arco (1º=60').

Tendo em conta a proporcionalidade directa atrás referida, se o objecto tivesse um tamanho aparente de 24', a sua imagem, no plano focal do mesmo telescópio mediria 6,78 mm. Se o objecto medisse aparentemente 6', a imagem mediria metade de 3,39 mm.

3. Um objecto com o tamanho aparente θ_3, **em segundos de arco** ('') vai aparecer, no plano focal de um telescópio de distância focal *f* (em milímetros,) com o tamanho linear dado por

$$d_3 = \frac{f \times \theta_3}{57{,}296 \times 3600} \quad \text{(Equação 4)}$$

Exemplo 3: um planeta com o diâmetro aparente de 14'', no caso de se utilizar um telescópio com a distância focal nativa de 1200 mm vai originar uma imagem no plano focal desse telescópio, com o diâmetro

$d_3 = \frac{1200 \times 14}{206265}$=0,0814 mm.

O factor 206265 é 1 rad expresso em segundos de arco (1''=1/3600 do grau).

Para o mesmo objecto, o tamanho linear da imagem é directamente proporcional à distância focal. Por exemplo, duplicando a distância focal, a imagem de um dado planeta será duas vezes maior. Se a distância focal efectiva do instrumento fosse elevada para 12000 mm (utilizando por exemplo um sistema de projecção positiva) a imagem do mesmo planeta, no plano focal final, seria dez vezes maior, ou seja, de 0,814 mm. Deste último exemplo pode concluir-se o interesse na utilização de grandes distâncias focais para que as imagens dos planetas tenham dimensões suficientes para revelar pormenores, seja em fotografia digital seja em fotografia analógica.

4. Estes cálculos podem inverter-se com vista a calcular a distância focal necessária de modo a produzir uma imagem (de um dado objecto) com o tamanho pretendido. Como exemplo 4, suponha-se que numa dada ocasião Júpiter apresenta um diâmetro aparente de 48''. Qual deverá ser a distância focal para que a imagem apresente 1,5 mm de diâmetro?

Da expressão $d_3 = \frac{f \times \theta_3}{57{,}296 \times 3600}$ obtemos $f = \frac{206265 \times 1{,}5}{\theta_3} = \frac{206265 \times 1{,}5}{48} = 6445{,}8$ mm.

Arredondada ao milímetro mais próximo, a distância focal pretendida será pois de 6446 mm.
A distância focal nativa de um telescópio é a distância focal sem recurso a dispositivos modificadores dessa distância focal: redutores de focal, lentes de Barlow, projecção positiva por oculares, etc.

Usando esses dispositivos modificadores, a distância focal que deverá entrar nos cálculos será a distância focal equivalente obtida mediante tais dispositivos. Se o astrofotógrafo utilizar, por exemplo, um telescópio de 900 mm de distância focal, com um dispositivo que triplique a distância focal, deverá utilizar nos cálculos o valor f=3×900 mm=2700 mm.

5. É ainda possível dar outra utilidade a estes cálculos. Sabendo a distância angular entre os pontos A e B, no céu, e medindo a correspondente dimensão linear no plano focal, poderemos determinar a distância focal do telescópio.
Esta questão tem interesse em três situações particulares:

a) na utilização de telescópios em que a distância focal não pode ser medida directamente: é o caso dos catadióptricos Schmidt-Cassegrain e Maksutov-Cassegrain, assim como o de todas as variantes puramente reflectoras dos telescópios Cassegrain;

b) no caso em que se utilize um sistema multiplicador de focal, ou uma combinação de tais sistemas, que nos conduz a uma distância focal desconhecida à priori.

c) no caso dos telescópios referidos em a) cuja focagem se faz movimentando o espelho primário, ou o secundário, o que resulta numa *distância focal variável*, que dependerá do recuo do plano focal, consoante o empilhamento de acessórios, extensores mecânicos e filtros, e eventualmente a câmara CCD, colocados no porta oculares.

Para o exemplo 5 deste artigo, admitamos que o telescópio produz uma imagem de 2,2 mm de comprimento tendo o correspondente objecto a dimensão aparente de 50''. Qual será a distância focal?

Da equação 4, obtemos

$$d_3 = \frac{f \times \theta_3}{206265} \text{ ou seja, } f = \frac{206265 \times d_3}{\theta_3} = \frac{206265 \times 2{,}2}{50} = 9075{,}7 \text{ mm}$$

6. Uma última aplicação destas considerações permite determinar o diâmetro aparente (ou a distância angular entre dois pontos), no céu, correspondente a uma dada dimensão linear no plano focal, conhecendo a distância focal. Como exemplo 6, consideremos um telescópio de distância focal 1200 mm, produzindo a dimensão linear de 0,5 mm no seu plano focal. Qual é e medida angular correspondente, no céu?

Utilizando, por exemplo, a equação 4, obtemos

$$d_3 = \frac{f \times \theta_3}{206265}, \text{ de onde se conclui que}$$

$$\theta_3 = \frac{206265 \times d_3}{f} = \frac{206265 \times 0{,}5}{1200} = 85{,}94'',$$

ou seja, 1,432' . É claro que poderíamos ter utilizado a equação 3, obtendo directamente o resultado θ_3 em minutos de arco.

Espero que os cálculos que agora demonstrados sejam úteis aos potenciais interessados.

Referências:

ALMEIDA, GUILHERME DE— *Telescópios*, Plátano Editora, Lisboa 2004.